http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 6 B

1. Soit a_n une suite des nombres reéls. Soit

$$s_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ .$$

(i) Prouver que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$;

(ii) Prouver que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ alors $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$;

(iii) Utiliser le point précédent pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$;

(iv) Trouver une suite a_n qui n'a pas limite telle que s_n converge ;

(v) Calculer la limite de la suite

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \ .$$

2. Montrer qu'une suite (s_n) est non-majorée si et seulement si elle contient une sous-suite avec pour limite $+\infty$.

3. Montrer qu'une suite (s_n) est non-minorée si et seulement si elle contient une sous-suite avec pour limite $-\infty$.

4. Soit $s_0 = 1$ et $s_n = \frac{1}{3}(s_{n-1} + 1)$ pour $n \geq 1$.

a) Trouver s_n pour $n \leq 4$.

b) Montrer par récurrence que $s_n > \frac{1}{2}$.

c) Montrer que la suite est décroissante.

d) Montrer que cette suite a une limite et trouver la.

5. Soit $t_1 = 1$ et $t_{n+1} = (1 - \frac{1}{4n^2})t_n$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} t_n$ existe.

b) Deviner sa valeur.

6. Soit $t_1 = 1$ et $t_{n+1} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})t_n$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} t_n$ existe.

b) Deviner sa valeur.

c) Montrer par récurrence que $t_n = \frac{n+1}{2n}$.

d) Refaire le point précédent.